



پاسخ تشریحی  
المپیاد ریاضی  
پایه هفتم

المپیاد مرحله اول (بهمن ۹۶-۹۵)

هرگونه کپی برداری و تکثیر، غیر اخلاقی بوده و پیگرد قانونی به همراه خواهد داشت



جمیله زجاجیان

سیاوش کاردار تهران

۱- گزینه ۲

نکته آموزشی: در حل تفریق عبارت، ترتیب عملیات بسیار مهم است:

(۱) پرانتزها و دسته بندی ها (۲) ضرب و تقسیم از چپ به راست (۳) جمع و تفریق از چپ به راست

$$(9 \times (-5) \div 5 \times (-3)) \div (-5 - \underbrace{4 \times 3}_{-12} \div (-3)) = (+27) \div (-5 + 4) = 27 \div (-1) = -27$$

$\underbrace{-45}_{-9} \quad \underbrace{-12}_{+4}$   
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_{+27}$

۲- گزینه ۳

عبارت کلامی گزینه ۱) ۵ واحد بیشتر از ۳ واحد کمتر از چهار برابر عددی  
 عبارت کلامی گزینه ۲) سه واحد کمتر از ۵ واحد بیشتر از چهار برابر عددی  
 عبارت کلامی گزینه ۴) سه واحد کمتر از چهار برابر پنج واحد بیشتر از عددی

۳- گزینه ۴

$$3(4 - (5 - (\square - 4))) = 18 \Rightarrow 18 \div 3 = 6$$

$$4 - (5 - (\square - 4)) = 6 \Rightarrow 5 - (\square - 4) = 0 \Rightarrow \square - 4 = 5 \Rightarrow \square = 9$$

برای حل این سوال ۲ راه حل وجود دارد. روش اول حل تفریق معادلات و پیدا کردن جواب

۴- گزینه ۳

روش دوم مدارگذاری: این روش بهتر به نظر می رسد:

$$\text{گزینه ①: } \underbrace{4 \times (-5) + 10}_{-10} \neq \underbrace{15 + (-5)}_{10}$$

$$\text{گزینه ②: } \underbrace{-4 \times (-5) - 10}_{10} \neq \underbrace{15 - (-5)}_{20}, \quad \text{گزینه ③: } \underbrace{4 \times (-5) + 10}_{-10} = \underbrace{-15 - (-5)}_{-10}$$

$$\text{گزینه ④: } \underbrace{4 \times (-5) - 10}_{-30} \neq \underbrace{15 - (-5)}_{20}$$



۵- گزینه ۳

تذکره:  $(-4) + 5 = +1$

میانگین =  $\frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} \Rightarrow +3 = \frac{\text{مجموع}}{3} \Rightarrow \text{مجموع} = 3 \times 3 = 9$

تذکره:  $9 - (1 + (-4)) = 12$   
تذکره:  $9 - (1 - 4) = 12$

۶- گزینه ۴



عملیات را عکس می‌کنیم (جمع و تفریق به هم تبدیل می‌شوند) (ضرب و تقسیم به هم تبدیل می‌شوند)

۷- گزینه ۱

از آن جایی که  $4 = 90 \div 340$  پس بعد از ۴ بار دوران ۹۰ درجه شکل روی خودش منطبق می‌شود.

و اکنون  $1395 \div \frac{4}{341}$  و این یعنی در ۱۳۹۵ بار دوران ۹۰ درجه، ۳۴۱ بار شکل روی خودش منطبق می‌شود.  
پس مانند ۳

حال باید ۳ بار دیگر دوران ۹۰ درجه انجام شود. یعنی باید فقط شکل را ۲۷۰ درجه در جهت عقربه‌های عقربه‌هاست دوران دهیم.

و اما نکته جالب اینجاست که هر چقدر دوران ۲۷۰ درجه عقربه‌های عقربه‌هاست می‌ترانیم ۹۰ درجه در خلاف جهت عقربه‌های عقربه‌هاست دوران دهیم چون نتیجه هر دو یکسان است. تا این مرحله شکل به هدرت تبدیل می‌شود در بارهای

این شکل را باید نسبت به خط  $d$  قرینه کنیم که به هدرت تبدیل می‌شود.



جمیله زجاجیان

سیاوش کاردار تهران

۱- گزینه ۳

در کتاب درسی بحثی داریم تحت عنوان « مقدار عددی یک عبارت جبری »

در این سوال  $a * b$  در واقع همان عبارت جبری داده شده است و  $۳ * ۴$  - همان مقداری هستند که قراراست به جای  $a$  و  $b$  قرار دهیم. در واقع صورت دیگر این سوال به شکل زیر است:• مقدار عددی عبارت  $b(a-b) + 2ab$  را برای  $a = -۳$  و  $b = ۴$  بدست آورید.

$$a * b = b(a-b) + 2ab \Rightarrow (-۳) * ۴ = ۴ \underbrace{(-۳ - ۴)}_{-۲۸} + 2 \times (-۳) \times (۴) = -۲۸ - ۲۴ = -۵۲$$

۹- گزینه ۴

نکته آموزشی ۱: دوران ۱۸۰ درجه همان قرینه مریزی است.

نکته آموزشی ۲: قرینه عدد  $A$  نسبت به عدد  $O$  به کمک فرمول زیر بدست می آید. توضیح کامل فرمول در کانال [@weusemath](https://www.instagram.com/weusemath)

$$O \text{ عدد} - (A \text{ عدد}) = (۲ \times O \text{ عدد}) - A \text{ عدد}$$

$$B \text{ نسبت به } A: ۲ \times (-۱) - (-۲) = ۰$$

حال مراحل زیر را انجام می دهیم:

$$B \text{ نسبت به } E: ۲ \times (-۱) - ۲ = -۴$$

حال باید قرینه  $A$  (جدید) را نسبت به  $E$  (جدید) بدست آوریم:

$$۰ = -۱ - ۲ \times (-۴) \Rightarrow ۰ = -۱ + ۸ \Rightarrow ۱ = ۷$$

اگر اختلاف ۱- را با ۲- باید محاسب کنیم. برای بدست آوردن اختلاف باید عدد بزرگتر را

$$۱ - (-۲) = ۱ + ۲ = ۳$$

مهای عدد کوچکتر کنیم:



a	b
۱	۲
۴	۱۱
۵	?
۹	۲۶

۱- گزینه ۲

$$b = 2a - 1 \xrightarrow{a=5} b = 2 \times 5 - 1 = 14$$

۱۱- گزینه ۱

اطلاعات دارد. شده را تجزیه و تحلیل می‌کنم.

• محال ضرب دو عدد  $a$  و  $b$  مثبت است: یعنی دو عدد  $a$  و  $b$  هم علامت هستند (باهر دو مثبت، باهر دو منفی) و محال ضرب

• محال ضرب دو عدد  $b$  و  $c$  منفی است: یعنی حداقل یکی از آن‌ها صفر است اما با توجه به سمت تکی  $a$  و  $b$  هم یکدم صفر نیستند پس  $b \neq 0$  و  $c = 0$  می‌باشد.

• محال تقسیم  $d$  بر  $a$ ، منفی است: یعنی  $a$  و  $d$  دارای علامت‌های متفاوت هستند و چون  $a$  و  $b$  هم علامت هستند پس  $d$  و  $b$  هم دارای علامت‌های متفاوت هستند و ضمناً  $d \neq 0$

رایج ترین گزینه‌ها را بررسی می‌کنم.

گزینه ۱)  $b$  و  $d$  مختلف علامت هستند پس  $b$  و  $d$  هم علامتند پس محال  $b - d$  نمی‌تواند صفر باشد.

گزینه ۲)  $b$  و  $d$  مختلف علامت هستند و می‌توانند قرینه هم باشند پس امکان دارد محال  $b + d$  صفر شود.

گزینه ۳) چون  $c = 0$  و محال ضرب هر عدد در صفر، صفر می‌گردد، حاصل  $d \times c$  حتماً صفر می‌شود.

گزینه ۴) چون  $c = 0$  و محال تقسیم صفر بر هر عدد، صفر می‌گردد، محال  $\frac{c}{d}$  حتماً صفر می‌گردد.



۱۲- گزینه ۱

دوروش برای حل این سوال وجود دارد:

روش اول: عدد مربوط به  $A$  و  $B$  را بیابانیم پس اختلاف آن‌ها را بدست آوریم.  
چون مرکز هر دایره نقطه وسط دو قطر آن است، پس  $A$  و  $B$  همان میانگین دو سر قطرها هستند:

$$A = \frac{(-23) + (-9)}{2} = -16 \quad B = \frac{-9 + 1}{2} = -4 \rightarrow B - A = -4 - (-16) = 12$$

روش دوم: فاصله  $A$  تا  $B$  نصف فاصله  $-23$  تا  $+1$  است. پس در واقع نصف مجموع دو قطر است:

$$\frac{(+1) - (-23)}{2} = 12$$

اختلاف  $-23$  تا  $+1$  را بدست می آوریم پس نصفش کنیم:

۱۳- گزینه ۱

نکته آموزشی ① حاصل ضرب  $a \times b$  در  $a$  برابر است با حاصل ضرب دو عدد:  $[a, b] \times (a, b) = a \times b$

$$(a, b) = \frac{a \times b}{[a, b]}$$

نکته آموزشی ② سه ویژگی نگارش نکته آموزشی ①:

نکته آموزشی ③  $a$  و  $b$  دو عدد بزرگتر از  $a$  و  $b$  هستند.

نکته آموزشی ④  $a$  و  $b$  دو عدد که یکی بزرگتر از دیگری باشد.

دانش آموز به این نکته عبارت را بررسی می کنیم: بالای هر سمت شماره نکته مورد نظر نوشته شده است:

$$\frac{(a, b) [a, b]}{[a, b], [a, b]} \xrightarrow{\textcircled{1}} \frac{a \times b}{[a, b]} \xrightarrow{\textcircled{2}} (a, b)$$

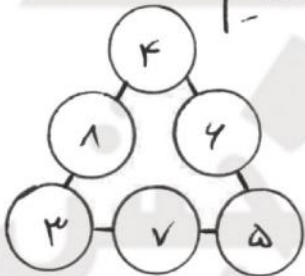
$\left. \begin{array}{l} \text{ک } a \text{ و } b \text{ بزرگتر از } a \text{ و } b \text{ است} \\ \text{ک } a \text{ و } b \text{ بزرگتر از } a \text{ و } b \text{ است} \end{array} \right\}$



۱۴- گزینه ۳

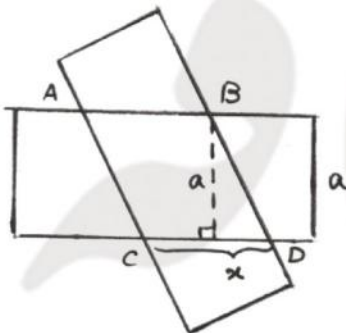
مجموع اعداد ۳، ۸ برابر با ۳۳ می شود. اما در این شکل ۳ عدد وجود دارد که هر کدام در دو ضلع مشترک است. بنابراین مجموع اعداد روی هر ضلع نمی تواند ۱۱ باشد چون  $۳ \times ۱۱ = ۳۳$  و مساوی می شود در حالی که باید بیشتر شود.

اما حداقل مجموع زمانی اتفاق می افتد که اعداد روی رأس ها که روی دو ضلع مشترک هستند از بین کوچکترین اعداد انتخاب شوند یعنی ۳، ۴ و ۵ را در رأس ها قرار دهیم و با بررسی بقیه اعداد را روی ضلع ها قرار می دهیم:



$$4 + 4 + 5 = 4 + 1 + 2 = 3 + 7 + 5 = 15$$

۱۵- گزینه ۴



$$S_{\text{کل}} = S_{\text{مستطیل}} - S_{ABDC}$$

$$\text{مساحت سرازلی الاضلاع} = \text{ارتفاع} \times \text{مقاعد} = x \times a = ax$$

$$\text{مساحت درمستطیل} = 2(\text{عرض} \times \text{طول}) = 2ab$$

$$\text{مساحت کل شکل} = 2ab - ax = a(2b - x)$$

نکته آموزشی: در این عبارت جبری اگر عملیات دارای عامل مشترکی باشند می توان از آن عامل مشترک (فاکتور) گرفت.

$$2ab - ax = 2 \times a \times b - a \times x = a \times \left( \frac{2ab}{a} - \frac{ax}{a} \right)$$

↓                      ↓  
عامل مشترک

$$= a(2b - x)$$



شماره جمله	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$
جمله	-1	-3	-2	+1	+3	+2	-1	-3

۱۶- گزینه ۱

با توجه به جدول داد شده الگو به صورت متناوب است:  $a_3 + a_5 = a_4$   $a_2 + a_6 = a_3$   $a_1 + a_7 = a_2$

یعنی هر جمله از جمع جمله قبل و بعدش به وجود آمده است. معنی برای بدست آوردن هر جمله باید جمله قبلی اش را بنویسید

جمله دوازدهم کنیم:  $(a_{12} = a_{11} - a_1)$ . وقتی با این الگو اعداد بعدی را بدست می آوریم، متوجه می شویم که بعد از ۶ جمله

دوباره جمله از ابتدا تکرار می شوند. پس برای بدست آوردن جمله هفتم، چون  $\frac{14}{14} = 1$  می باشد یعنی ۱۶ دور باقی مانده

کمال این اعداد تکرار شده اند و کافی است جمله چهارم را بدست آوریم (چون باقی مانده چهار شده است)  $a_{10} = a_4 = +1$

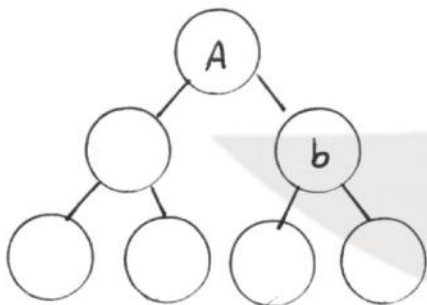


۱۷- گزینه ۱

برای راحتی کار اصل بار خط را به سمت های مساوی تقسیم می کنیم. البته دقت داشته باشید که این نقاط جزو نقاط فعلی

در نظر گرفته نمی شوند حال با در هم بردن کوسازی تمام با خط ها را نام می بریم تا شماره کردن ها را با هم جمع کنیم:  $AB = \frac{14}{8} = 2 \text{ cm}$

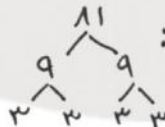
$$AB + AC + AD + AE + BC + BD + BE + CD + CE + DE = 2 + 4 + 1 + 14 + 2 + 4 + 14 + 4 + 12 + 1 = 74$$



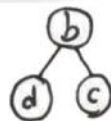
۱۸- گزینه ۲

X جمله اول: می تواند A عددی باشد که تجزیه آن به صورت متناوب باشد اما تعداد

سازنده هایش فرد باشد. مانند عدد ۸۱ که پنج سازنده دارد:



۷ جمله دوم: با فرض مساوی بودن (اعداد c, d) می بینیم که b برابر d خودش و  $d = c$  بخش نیز است



X جمله سوم: با فرض  $A = 81$  این جمله نادرست است چون ۵ سازنده دارد.





۱۹- گزینه ۱

گزینه ۱) درست است.  $A$  نمی تواند فقط عامل ۳، یا فقط عامل ۷، یا داشته باشد زیرا در این صورت ب م.م.م

دورقمی نمی شود. دورقمی نیست  $(21, 7^n) = 7$  دورقمی نیست  $(21, 3^n) = 3$

پس باید عامل ۷ را با هم داشته باشد. بنابراین  $A$  مضرب ۲۱ است.

گزینه ۲) اگر  $A=210$  باشد آن  $b = 21 = (21, 210)$  می شود. پس  $A$  می تواند سه رقمی باشد. این گزینه نادرست است.

گزینه ۳) اگر  $A=43$  باشد آن  $b = 21 = (21, 43)$  می شود. در صورتی که  $A$  بر ۱۴ بخش پذیر نیست. این گزینه نادرست است.

گزینه ۴) اگر  $A=42$  باشد آن  $b = 21 = (21, 42)$  می شود. در صورتی که  $A$  به جز ۳، ۷، ۱۴ و ۲۱ دیگر دارد. این گزینه نادرست است.

۲۰- گزینه ۴

با یکی وقت می بینیم:  $(a, b) = 59$  ،  $a - b = 118 = 2 \times 59$

$a$  و  $b$  مضرب ۵۹ هستند و اختلاف آن  $2 \times 59$  شد است. پس چون  $a > b$  است:

$$a = 3 \times 59 \quad , \quad b = 1 \times 59 \Rightarrow a - b = 3 \times 59 - 1 \times 59 = 2 \times 59$$

$$\Rightarrow a + b = 3 \times 59 + 1 \times 59 = 4 \times 59 = 236$$

۲۱- گزینه ۳

• این جمله اول غلط است: مثلاً ۲ بر عدد اول ۲ بخش پذیر است و اول نیز هست.

• جمله دوم درست است: زیرا عددی که به صورت ضرب دو عدد بزرگتر از یک نوشته شود غیر از یک خودش بر آن دو عدد بخش پذیر است.

• جمله سوم درست است: وقتی  $a$  مضرب  $b$ ،  $b$  مضرب  $c$  باشد پس  $a$  مضرب  $c$  است یعنی  $c$  غیر از یک خودش

بر  $a$  نیز بخش پذیر است پس اول نیست. (با توجه به این که  $a, c$  م.م.د می باشند)



۲۲- گزینه ۲

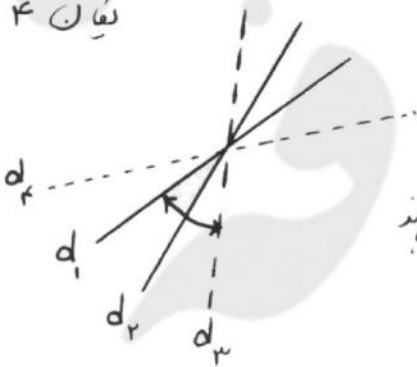
گزینه ۱) حاصل ۵۳۱ می شود که بر ۳ بخش پذیر است. پس اول نیست.  
گزینه ۲) اول است. که با عدد گزینیه های ۱، ۳، ۴ می توان اول بودن گزینیه ۲ را بدون محاسبه معلوم کرد.  
گزینه ۳) با توجه به دو نکته معلوم می شود حاصل زوج است. پس اول نیست.

نکته آموزشی: مزد = فرد × فرد و زوج = فرد + فرد

$$\frac{\text{فرد}}{۵} \times ۱۳۷ + \frac{\text{فرد}}{۱} \rightarrow \text{زوج}$$

گزینه ۴) با توجه به دو نکته معلوم می شود حاصل ۱۵ است پس بر ۵ بخش پذیر است بنابراین اول نیست.

$$\frac{۲ \times ۲۲۲}{۴} + ۱ \rightarrow ۱۵$$



۲۳- گزینه ۲

زاویه بین  $d_1$  و  $d_2$  برابر است با زاویه بین  $d_1$  و  $d_3$  و هر دو  $۲۵^\circ = \frac{۵۰}{۲}$  می باشد.

زاویه بین  $d_1$  و  $d_2$  سه برابر زاویه بین  $d_1$  و  $d_3$  است پس  $۳ \times ۲۵^\circ = ۷۵^\circ$

۲۴- گزینه ۳

برای حل این سوال روش مختلف مطرح می کنیم:

روش اول: بعد از ۷ مرحله  $۲۱ \div ۴ = ۷$  ، اختلاف در هر مرحله  $۷ - ۳ = ۴$  ، اختلاف اولیه  $۳۱ - ۱ = ۲۸$

که بعد از ۷ مرحله روی پله ۵۹ قرار دارند:  $۷ \times ۴ + ۳۱ = ۷ \times ۷ + ۱ = ۵۹$

روش دوم: اگر تعداد پله را  $x$  در نظر بگیریم، بعد از  $x$  پله روی یک پله ایستاده اند پس:

$$۳۱ + ۳x = ۱ + ۷x \Rightarrow ۳۱ - ۱ = ۷x - ۳x \Rightarrow ۲۸ = ۴x \Rightarrow x = \frac{۲۸}{۴} = ۷$$

$$۳۱ + ۳ \times ۷ = ۱ + ۷ \times ۷ = ۵۹$$



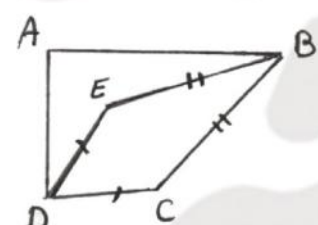
۲۵- گزینه ۳

وقتی  $A$  دارای دو شمارنده اول است، پس تجزیه آن به صورت  $A = a^m \times b^n$  می باشد و چون حاصل جمع آن ها عددی اول و کوچکتر از ۱۰ می باشد یعنی ۲، ۳، ۵ یا ۷. مجموع دو عدد اول هیچ  $a$  یا  $b$  ۲ یا ۳ نمی شود. پس دو حالت دیگر را بررسی می کنیم: (با در نظر گرفتن این نکته که  $A$  عدد دورقمی است)

$$a+b=5 \Rightarrow 2+3=5 \Rightarrow A=2^m \times 3^n \Rightarrow \begin{cases} 2^1 \times 3^1 = 12 & \text{کوچکترین عدد که تجزیه آن به این صورت باشد} \\ 2^5 \times 3^1 = 96 & \text{بزرگترین} \end{cases}$$

$a+b=7 \Rightarrow 2+5=7 \Rightarrow A=2^m \times 5^n \Rightarrow \begin{cases} 2^1 \times 5^1 = 10 & \text{کوچکترین عدد که تجزیه آن به این صورت باشد} \\ 2^4 \times 5^1 = 80 & \text{بزرگترین} \end{cases}$

در این ۴ حالت کمترین مقدار  $A$  برابر با ۱۰ و بیشترین مقدار برابر با ۹۶ می باشد به مجموع آن ها  $10 + 96 = 106$  می شود.



۲۶- گزینه ۲

دو چهارضلعی  $ABED$  (مقعر) و  $ABCD$  (مخرب) را در نظر بگیرید.

اصطلاح دوم در برابرند  $(AB=AB)(AD=AD)(BE=BC)(DE=DC)$  اما دو چهارضلعی نام نهفت هستند. و دو ضلع آن ها هم دیگر راویس اند. با توجه به این شکل می توانیم به این نتیجه ها برسیم صحیح هستند.

۲۷- گزینه ۲

-۹۰	-۵۰		
-۷۰	b	-۱۰	-۱۲۰
a	c	-۳۰	?

برای رسیدن به عددی که به جای ؟ می نشاند باید اعداد  $a$  و  $b$  و  $c$  را بدست آوریم:

$$\left. \begin{aligned} -70 + b + (-10) &= -120 \Rightarrow b = 30 \\ a + (-70) &= -90 \Rightarrow a = -20 \\ c + 30 &= -50 \Rightarrow c = -80 \end{aligned} \right\} \Rightarrow ? = -20 + (-10) + (-80) = -110$$



۲۸- گزینه ۳

تعداد کتاب های نیزگیه در طبقه اول را  $x$  در نظر می گیریم، در طبقه دوم  $2x$  کتاب اینی در طبقه سوم  $3 \times 2x = 4x$

کتاب نجوم دارد. در طبقه ۴ به اندازه « ۳ تا بیشتر از اختلاف تعداد کتاب های طبقه های دوم و سوم » بنابراین:

$$\text{تعداد کتاب های طبقه چهارم} = (4x - 2x) + 3 = 4x + 3$$

در مسئله گفته « تعداد کتاب های طبقه چهارم = اختلاف تعداد کتاب های طبقه های اول و دوم »

$$4x - x = 4x + 3 \Rightarrow 5x - 4x = 3 \Rightarrow x = 3$$

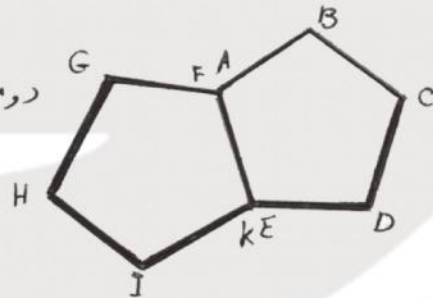
$$\left. \begin{aligned} \text{تعداد کتاب های ریاضی (طبقه چهارم)} &= 4x + 3 \stackrel{x=3}{=} 4 \times 3 + 3 = 15 \\ \text{تعداد کتاب های ادبی (طبقه دوم)} &= 2x \stackrel{x=3}{=} 2 \times 3 = 6 \end{aligned} \right\} 15 + 6 = 21$$

۲۹- گزینه ۴

دو ۵ ضلعی  $ABCDE$  و  $FGHIK$  را در نظر بگیریم. اگر این دو ۵ ضلعی قاعده های

دو منشور باشند داریم:

$$\text{تعداد یال های هر منشور} = 3n \xrightarrow{n=5k} 3 \times 5k = 15k$$



$$2 \times 15k = 30k$$

اگر دو منشور جدا از هم باشند، تعداد کل یال ها برابر است با:

اما زمانی که این دو منشور از وجه جانبی بهم می چسبند ۶ یال حذف می شود. در شکل بالا  $AE$  و  $FK$  از

کف قاعده و ۴ یال قطر از قاعده ها پس حذف می شوند. در یال های جانبی از قاعده بالا به پایین از ۴ یال

۴ یال حذف می شوند و ۴ یال در مجموع یال ها به حساب می آید پس کل یال ها  $(30k - 6)$



۳. گزینه ۲

کمترین مقدار  $m$  وقتی است که دو عدد  $m$  دی باشند  $[a, a] = a$  پس چون مجموع ۲۴ شده است

$$\text{هر کدام } 24 \div 2 = 12 \text{ می باشد بنابراین } [12, 12] = 12$$

بیشترین مقدار  $m$  وقتی است که دو عدد هیچ عامل مشترکی نداشته باشند و  $m$  آن ها یک شود پس در

این جا دو عدد را ۱۱ و ۱۳ در نظر بگیریم که در این صورت

$$[11, 13] = \frac{11 \times 13}{(11, 13)} = \frac{143}{1} = 143$$