

هوالمعلل

مرله اول آزمون انتخابی مسابقات IMC چین

ویژه دانش آموزان مقطع متوسطه اول

اسفند ماه ۱۳۹۳

مدت زمان پاسخگویی: ۱۰۰ دقیقه

سوالات نمره‌ی منفی دارد. (به ازای هر ۴ پاسخ اشتباه، یک پاسخ صحیح حذف می‌گردد).

استفاده از ماشین حساب، تبلت، تلفن همراه و هر گونه وسیله الکترونیکی ممنوع است.

۱. در مجموعه‌ی اعداد گویا عمل $*$ را به صورت $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$ تعریف می‌کنیم. مقدار عبارت

$1 * (2 * (3 * (4 * 5)))$ برابر است با:

(۱) ۱ (۲) ۱۵ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{4}{5}$ (۵) ۴

۲. چند عدد صحیح زوج سه رقمی وجود دارند که رقم‌های آن‌ها از چپ به راست اکیداً صعودی باشند؟

(۱) ۲۱ (۲) ۳۴ (۳) ۵۱ (۴) ۷۲ (۵) ۱۵۰

۳. یک شش ضلعی منتظم را طوری به n متوازی‌الاضلاع هم‌مساحت تقسیم کرده‌ایم که هیچ ناحیه‌ی مشترکی با یکدیگر ندارند. n کدام یک از اعداد زیر نمی‌تواند باشد؟

(۱) ۲۰۱۳ (۲) ۲۰۰۷ (۳) ۱۳۹۵ (۴) ۱۳۰۱ (۵) ۹۰۰

۴. در دنباله‌ای از اعداد، نخستین عدد برابر ۱۹ و نهمین آن‌ها برابر ۹۹ است. همچنین با شروع از عدد سوم و با احتساب خود عدد سوم، هر عدد میانگین اعداد قبلی این دنباله‌ی عددی است. دومین عدد در این دنباله‌ی عددی چیست؟

(۱) ۵۹ (۲) ۷۹ (۳) ۹۹ (۴) ۱۳۹ (۵) ۱۷۹

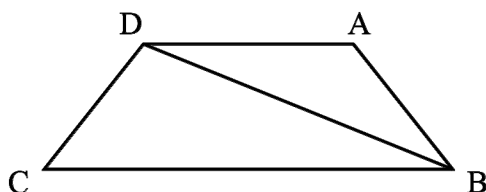
۵. اگر $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{10}{7}$ باشد، مقدار $a + b + c$ برابر است با: $(a, b, c \in \mathbb{N})$

- (۱) ۱۴ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۱۰ (۵) ۸

۶. بزرگ‌ترین شمارنده‌ی اول مشترک اعداد شش رقمی‌ای که از تکرار یک عدد دو رقمی به دست می‌آیند، چیست؟

- (۱) ۳۷ (۲) ۷۳ (۳) ۸۹ (۴) ۹۷ (۵) ۱۰۱

۷. در چهارضلعی محدب ABCD داریم: $DA = 9$ ، $CD = 15$ ، $BC = 27$ و $AB = 5$. همچنین می‌دانیم که اندازه‌ی BD عددی طبیعی است. اندازه‌ی BD کدام عدد می‌تواند باشد؟ (ابعاد شکل واقعی نیست.)



- (۱) ۱۱ (۲) ۱۲

- (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

- (۵) ۱۵

۸. چند تا از توان‌های طبیعی ۲ وجود دارند که اگر آن‌ها را حساب کرده و اولین رقم از سمت چپ را حذف کنیم، نتیجه باز هم توانی از ۲ خواهد بود؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸ (۵) بیش از ۸

۹. در کلاسی ۲۶ دانش‌آموز وجود دارند. پویا یکی از دانش‌آموزان این کلاس است. او به تازگی به این حقیقت پی برده است که تعداد دوستان هر یک از همکلاسی‌های او با تعداد دوستان سایر همکلاسی‌هایش متفاوت است. پویا چند دوست در این کلاس دارد؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۰ (۴) ۲۵ (۵) ۲۴

۱۰. یک جعبه‌ی شکلات، یازده ردیف یازده تایی دارد. شکلات‌های موجود را هر طور قرار دهیم، در بیشتر ردیف‌های افقی، بیشتر خانه‌ها خالی هستند. حداکثر تعداد شکلات‌ها چند تا است؟

- (۱) ۳۵ (۲) ۳۶ (۳) ۶۶ (۴) ۸۵ (۵) ۸۶

۱۱. چند عدد اول مانند p می‌توان پیدا کرد که برای آن‌ها $24p + 1$ برابر با مربع یک عدد طبیعی باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۲ (۵) ۸

۱۲. توده‌ای شامل ۳۷ سنگریزه داریم. آن را به طور دلخواه به دو بخش تقسیم می‌کنیم. سپس هر یک از این دو بخش را به دو بخش دیگر تقسیم می‌کنیم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که در هر بخش تنها یک سنگریزه باقی بماند. هر وقت که عمل بخش کردن را انجام می‌دهیم، تعداد سنگریزه‌های دو بخش را در هم ضرب کرده و حاصل را یادداشت می‌کنیم. مجموع اعدادی که یادداشت می‌شوند، کدام است؟

- (۱) ۶۶۶ (۲) ۶۸۵ (۳) ۷۰۳ (۴) ۷۴۱ (۵) ۸۱۴

۱۳. معادله‌ی $x^2 + 5y = 73$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح چند دسته جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه (۵) بیش از سه

۱۴. می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۱۰ را بدون تکرار در جدول زیر بنویسیم؛ به طوری که هر عدد هم از عدد سمت راستش و هم از عدد زیرش (در صورت وجود) کوچکتر باشد. این کار به چند روش امکان‌پذیر است؟

- (۱) ۳۴
(۲) ۳۵
(۳) ۳۶
(۴) ۴۴
(۵) ۴۵

۱۵. تعداد ۳۱ جعبه داریم که در هر کدام از آن‌ها حداقل یک سیب قرار دارد. در ۲۵ تا از آن‌ها حداقل ۲ سیب، در ۱۷ تا از آن‌ها حداقل ۳ سیب، در ۱۵ تا از آن‌ها حداقل ۴ سیب، در ۹ تا از آن‌ها حداقل ۵ سیب و در ۶ تا از آن‌ها حداقل ۶ سیب وجود دارد. در این جعبه‌ها روی هم حداقل چند سیب وجود دارد؟ (هم‌چنین می‌دانیم که در هر جعبه حداکثر شش سیب قرار دارند.)

- (۱) ۲۱
(۲) ۴۲
(۳) ۹۷
(۴) ۱۰۳
(۵) ۲۷۳

۱۶. در مثلث ABC که متساوی‌الساقین است، زاویه‌ی رأس A برابر با ۲۰ درجه است. نقطه‌ی D روی ضلع AB واقع شده است و $AD=BC$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی BCD چند درجه است؟

- (۱) ۶۵
(۲) ۶۸
(۳) ۷۰
(۴) ۸۰
(۵) ۷۵

۱۷. با چند روش مختلف می‌توانیم یک سالن ۲×۷ را با موازی‌یک‌های ۱×۲ و ۲×۲ فرش کنیم؟ (موازی‌یک‌ها نباید همپوشانی داشته باشند.)

- (۱) ۳۴
(۲) ۴۳
(۳) ۶۶
(۴) ۸۵
(۵) ۱۰۵

۱۸. چند عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰۰ می‌توان پیدا کرد که اگر آن‌ها را مجذور نماییم، مجذورشان به خودشان ختم شود؟

- (۱) ۴
(۲) ۶
(۳) ۷
(۴) ۹
(۵) ۱۰

۱۹. عد $۲^{۱۰} ۳^{۱۱} ۵^{۱۲}$ را در نظر گرفته و بزرگ‌ترین شمارنده‌ی آن (غیر از خودش) را از آن کم می‌کنیم و به جای عدد اولیه قرار می‌دهیم. در مرحله‌ی بعد این کار را تکرار می‌کنیم. بالاخره پس از چند مرحله به عدد یک می‌رسیم؟

- (۱) ۳۳
(۲) ۴۵
(۳) ۵۶
(۴) ۶۸
(۵) ۸۰

۲۰. مربع اعداد طبیعی متوالی را پشت سر هم نوشته‌ایم. صدمین رقم این دنباله از اعداد کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۳
(۳) ۵
(۴) ۷
(۵) ۹

۲۱. اگر p و q دو عدد اول متمایز بین ۴ و ۱۸ باشند و $k = pq - (p + q)$ ، کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند k باشد؟

- (۱) ۲۱
(۲) ۶۰
(۳) ۱۱۹
(۴) ۱۸۰
(۵) ۲۳۱

۲۲. می‌دانیم x و y و z اعدادی حقیقی هستند. اگر $x(y + z) = ۱۵۲$ ، $y(x + z) = ۱۶۲$ و $z(x + y) = ۱۷۰$ باشند، حاصل ضرب xyz کدام است؟

- (۱) ۶۷۲
(۲) ۶۸۸
(۳) ۷۰۴
(۴) ۷۲۰
(۵) ۷۵۰

۲۳. در دوزنقه‌ی ABCD اندازه‌های قاعده‌های AB و CD به ترتیب ۵۲ و ۳۹ و طول ساق‌های BC و DA به ترتیب ۱۲ و ۵ است. مساحت این دوزنقه برابر است با:

- (۱) ۱۹۵ (۲) ۱۸۲ (۳) $42\sqrt{35}$ (۴) $120\sqrt{5}$ (۵) ۲۱۰

۲۴. دو عدد 2^{1393} و 5^{1393} را کنار یکدیگر نوشته‌ایم. عدد حاصل چند رقمی است؟

- (۱) ۱۳۹۳ (۲) ۱۳۹۴ (۳) ۱۳۹۵ (۴) ۲۷۸۶ (۵) ۲۷۸۸

۲۵. جعبه‌ای با ابعاد $50 \times 40 \times 30$ در نظر بگیرید که از ۶۰ مکعب $10 \times 10 \times 10$ ساخته شده است. چند تا از این مکعب‌ها توسط یک قطر داخلی قطع می‌شوند؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱ (۵) ۱۲