

# المپیاد ریاضی پایه نهم

مرحله دوم ۱۳۹۵/۰۲/۰۸ ساعت: ۸ صبح

جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

اداره کل آموزش و پرورش خراسان رضوی

تعداد سوال: ۳۰

نام و نام خانوادگی داوطلب:

مدت پاسخگویی: ۹۰ دقیقه

شماره داوطلبی:

آزمون دارای نمره منفی می باشد.

۱- تعدادی توپ داریم که روی هر یک از آن‌ها یکی از عبارت‌های  $\frac{1}{3}$ ,  $\sqrt[3]{x}$ ,  $\sqrt{\pi x}$ ,  $|x|$ ,  $3^x$ ,  $\frac{9}{x^2}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{x^2}$  نوشته شده است. اگر از بین این توپ‌ها، به صورت تصادفی یک توپ انتخاب کنیم. چقدر احتمال دارد که بر روی این توپ، یک جمله‌ای نوشته شده باشد؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{5}{8}$  (۴)  $\frac{3}{8}$

۲- علامت دو عدد  $A = [ -(-4)^{-2} ]^{-4}$  و  $B = [ -(-5)^2 ]^5$  کدام است؟

- (۱)  $A$  مثبت و  $B$  منفی (۲)  $A$  منفی و  $B$  مثبت (۳)  $A$  و  $B$  هر دو مثبت (۴)  $A$  و  $B$  هر دو منفی

۳- کدام یک از گزینه‌های زیر با عبارت  $\frac{3a-4}{2a+5}$  برابر است؟  $(a \neq -\frac{5}{2})$

(۱)  $\frac{4-2a}{-5-2a}$  (۲)  $\frac{-2a-4}{2a-5}$  (۳)  $\frac{2a+4}{5-2a}$  (۴)  $\frac{-2a-4}{-2a-5}$

۴- کدام گزینه مقادیری که به ازای آن عبارت گویای  $\frac{p^2-4}{p^2-p-12}$  تعریف شده است را درست نشان می‌دهد؟

- (۱)  $\mathbb{R} - \{2, 4\}$  (۲)  $\mathbb{R} - \{-2, 4\}$  (۳)  $\mathbb{R} - \{2, -4\}$  (۴)  $\mathbb{R} - \{-2, 4, 2, -2\}$

۵- اگر  $\sqrt[3]{x} = \frac{5}{6}$  باشد، حاصل  $\sqrt{x}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{15}}{6}$  (۲)  $\frac{\sqrt{15}}{3}$  (۳)  $\frac{\sqrt{30}}{9}$  (۴)  $\frac{5\sqrt{30}}{36}$

۶- اگر قاعده‌های دو مثلث متساوی‌الساقین بر هم منطبق باشند، آنگاه پاره‌خطی که دو رأس متمایز این مثلث‌ها را به هم وصل می‌کند، همواره کدام خاصیت را دارد؟

- (۱) روی عمودمنصف قاعده مشترک قرار دارد. (۲) قطر یک چهارضلعی محدب است. (۳) چهار مثلث همنهشت ایجاد می‌کند. (۴) قاعده مشترک دو مثلث، عمودمنصف این پاره‌خط است.

۷- اگر نقطه‌های  $A = \begin{bmatrix} 5 \\ a \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -4 \\ b \end{bmatrix}$  روی خط  $y = ax + 7$  قرار داشته باشند، آنگاه  $b$  برابر است با:

- (۱)  $-14$  (۲)  $14$  (۳) صفر (۴)  $-\frac{4}{7}$

۸- اگر خط  $d$  به معادله  $y = -5x - 4$  موازی باشد و  $ax + by = c$  موازی باشد و  $a$  و  $b$  نسبت به هم اول باشند، آنگاه طول نقطه‌ای از خط

$d$  را بیابید که از دو نقطه  $\begin{bmatrix} k \\ a \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix}$  به یک فاصله باشد.

- (۱)  $3$  (۲)  $\frac{7}{5}$  (۳)  $-\frac{7}{5}$  (۴)  $-3$

۹- درجه یک جمله‌ای  $\frac{\sqrt{2}}{\pi} x^a y^b z^c$  نسبت به متغیرهای  $x, y, z$  به ترتیب برابر سه عدد طبیعی متوالی است به طوری که  $a < b < c$ . اگر درجه این یک جمله‌ای نسبت به متغیرهایش، چهار برابر درجه آن نسبت به متغیر  $x$  باشد، درجه این یک جمله‌ای نسبت به متغیر  $z$  کدام گزینه است؟  
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۰- اگر هر مورد زیر یک نوع مثلث را نشان دهد کدام دو مورد می‌توانند هم‌نهشت باشند؟

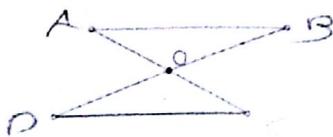
(الف) همه زوایای مثلث از ۵۸ درجه بزرگ‌تر می‌باشد.

(ب) یکی از ارتفاع‌های مثلث بیرون شکل است.

(ج) اندازه اضلاع مثلث برابر ۶ و ۸ و ۱۰ می‌باشد.

(د) همه از ارتفاع‌های مثلث، نیمساز زوایا نیز هستند.

(۱) الف و ب (۲) ب و ج (۳) الف و د (۴) ب و د



۱۱- در شکل مقابل پاره‌خط‌های  $AC$  و  $BD$  یکدیگر را در نقطه  $O$  قطع کرده‌اند به طوری که  $O$  وسط  $AC$  است. با اضافه کردن کدام گزینه به فرض‌های مسئله، هم‌نهشتی دو مثلث  $ABO$  و  $DOC$  اثبات نمی‌شود؟

(۱)  $AB \parallel DC$  (۲)  $\hat{B} = \hat{D}$  (۳)  $AB = DC$  (۴)  $BO = OD$

۱۲- در دبیرستان نخبگان، ۱۰۰ نفر در المپیاد ریاضی، ۵۰ نفر در المپیاد علوم و ۴۸ نفر در المپیاد ادبیات شرکت کرده‌اند. کسانی که حداقل در دو المپیاد شرکت کرده‌اند نصف کسانی هستند که حداقل در یک المپیاد شرکت کرده‌اند و کسانی که در سه المپیاد شرکت کرده‌اند نیز ثلث کسانی هستند که حداقل در یک المپیاد حضور داشته‌اند. در این دبیرستان چند دانش‌آموز در هر سه المپیاد شرکت کرده‌اند؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۳۶

۱۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر، فقط یک عضو دارد؟

(۱)  $\{(-1)^a + (-1)^b \mid a, b \in \mathbb{Z}, a + b = 6\}$  (۲)  $\{(-1)^a + (-1)^b \mid a, b \in \mathbb{W}, a, b = 6\}$

(۳)  $\{a \mid a \in \mathbb{Q}', \sqrt{2} < a < \sqrt{4}\}$  (۴)  $\{a \mid a \in \mathbb{N}, a < 11 - \frac{\sqrt{243}}{\sqrt{3}}\}$

۱۴- از عبارت  $(A - B) - C = C$  کدام گزینه قطعاً حاصل می‌شود؟

(۱)  $A = B = C$  (۲)  $(A \cap B) \cup C = A$  (۳)  $A = C = \emptyset$  (۴)  $A \cap C = A$

۱۵- فرض کنید  $p(A) = 0/4$  و  $n(A) = 6$  و  $n(B) = 5$  و  $S$  مجموعه تمام حالت‌های ممکن باشد.  $p(S) - p(B)$  چه قدر است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{4}$

۱۶- اگر از طول یک مستطیل ۵ واحد کم و به عرض آن ۴ واحد اضافه شود، مساحت آن ۷ واحد مربع کاهش می‌یابد و اگر در همان مستطیل اولیه، ۲ واحد به طول اضافه شود و از عرض آن ۲ واحد کم شود آنگاه مساحت مستطیل ۱۲ واحد مربع کاهش پیدا می‌کند. محیط مستطیل اولیه چقدر است؟

(۱) ۲۰ (۲) ۲۱ (۳) ۲۸ (۴) ۴۰

۱۷- اگر  $ax + by = c$  معادله یک خط باشد و بدانیم  $|c + |ab|| = ab - c$  و  $|cb| = cb$ ، آنگاه کدام گزینه می‌تواند درست باشد؟ ( $a, b, c \neq 0$ )

(۱) خط دارای شیب -۳ است و از ناحیه ۴ نمی‌گذرد. (۲) خط دارای شیب ۳+ است و از ناحیه ۴ نمی‌گذرد.

(۳) خط دارای شیب -۳ است و از ناحیه ۳ نمی‌گذرد. (۴) خط دارای شیب ۳+ است و از ناحیه ۳ نمی‌گذرد.

۱۸- اختلاف اندازه محیط و اندازه مساحت دایره‌ای، یک عدد گویا است. شعاع این دایره کدام عدد می‌تواند باشد؟

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{1}{\pi}$  (۳)  $\pi$  (۴)  $\frac{3}{14}$

۱۹- اگر بدانیم  $(a-b) \in Z$  باشد، آنگاه کدام گزینه حتماً درست است؟

- (۱) اگر  $a+b$  اعشاری متناوب باشد،  $b$  اعشاری مختوم است (۲) اگر  $a+b$  گنگ باشد،  $b$  گنگ است.  
 (۳) اگر  $a+b$  کسر گویای غیر صحیح باشد آنگاه  $b$  می‌تواند صحیح باشد (۴) اگر  $a+b$  صحیح باشد،  $b$  صحیح است.

۲۰- اگر  $xy=4$  و  $x^2y+y^2x+2x+2y=30$  باشد. مقدار  $x^2+y^2$  چقدر است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۷ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵

۲۱- حاصل  $\sqrt{11+2\sqrt{18}} + \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}$  برابر است با:

- (۱)  $2\sqrt{2}$  (۲) ۶ (۳)  $8+2\sqrt{2}$  (۴)  $5+\sqrt{18}$

۲۲- در مثلث  $ABC$  داریم.  $AB=AC=4\sqrt{2}$  cm و  $A=90^\circ$ . اگر  $D$  را طوری روی  $AB$  قرار دهیم تا فاصله آن از خط  $AC$  برابر  $3/6$  سانتی‌متر شود و از آن به امتداد  $AC$  در نقطه  $E$  وصل کنیم، در این صورت مساحت مثلث  $ADE$  با مساحت مثلث  $ABC$  برابر خواهد بود، اندازه  $AE$  برابر است با:

- (۱)  $6/4$  (۲)  $8/4$  (۳) ۶ (۴)  $1/2$

۲۳- اگر  $A = \{x \in W | x \leq 10\}$  باشد و همه زیرمجموعه‌های  $A$  را بنویسیم، رقم صفر چند بار نوشته می‌شود؟

- (۱) ۱۰۲۳ (۲) ۱۰۲۴ (۳)  $2^{11}-1$  (۴) ۲۱۱

۲۴- نمایش علمی عدد  $2016 \times 10^{n-1}$  برابر با کدام گزینه زیر می‌باشد؟ ( $n \in N, n \geq 3$ )

- (۱)  $2/016 \times 10^3$  (۲)  $2/016 \times 10^{2n-5}$  (۳)  $2/016 \times 10^{2n-4}$  (۴)  $2/016 \times 10^1$

۲۵- کدام گزینه درست است؟

- (۱) هر دو مستطیل دلخواه متشابه‌اند.  
 (۲) هر دو دوزنقه متساوی‌الساقین دلخواه متشابه‌اند.  
 (۳) هر دو مستطیل دلخواه که زاویه بین دو قطرشان با یکدیگر مساوی باشد، متشابه‌اند.  
 (۴) هر دو دوزنقه متساوی‌الساقین دلخواه که قاعده کوچکشان با ساق‌هایشان، مساوی باشد، متشابه‌اند.

۲۶- اگر  $a^2 + b^2 + c^2 + 6 = 2(a + 2b + c)$  باشد و  $a, b, c$  مثلثی بسازیم آنگاه کدام گزینه زیر درباره مثلث درست می‌باشد؟

- (۱) مثلث قائم‌الزاویه (۲) مثلث متساوی‌الساقین  
 (۳) مثلث متساوی‌الاضلاع (۴) مثلثی نمی‌توان ساخت

۲۷- با توجه به جدول‌های زیر کدام گزینه یک رابطه‌ی خطی بین  $x$  و  $y$  را نشان می‌دهد؟

x	۱	۲	۳	۴	۵	...
y	۳	۷	۱۳	۲۱	۳۱	...

(۲)

x	۰	۱	۲	۳	۴	...
y	۱۰۰	۹۰	۷۰	۴۰	۰	...

(۱)

x	۰	۱	۲	۳	۴	...
y	۰	۱۰	۴۰	۹۰	۱۶۰	...

(۴)

x	۱	۲	۳	۴	...
y	۴۰	۱۰	-۲۰	-۵۰	...

(۳)

۲۸- علی در تعطیلات عید به شهرهای  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $E$  سفر کرده است. او به دوستش حامد گفته است که فاصله  $A$  تا  $B$ ، ۳۴ کیلومتر و فاصله  $B$  تا  $C$  ۱۶۰ کیلومتر و فاصله  $C$  تا  $D$ ، ۵۶ کیلومتر و همچنین فاصله  $D$  تا  $E$ ، ۴۰ کیلومتر و فاصله  $A$  تا  $E$  برابر ۳۰ کیلومتر بوده است. با توجه

به صحبت‌های علی چند تا از موارد زیر درست است؟

الف) فاصله شهر  $B$  تا  $E$  عددی بین ۱۴ و ۶۴ می‌باشد.

ب) فاصله شهر  $E$  تا شهر  $C$ ، برابر ۹۶ می‌باشد.

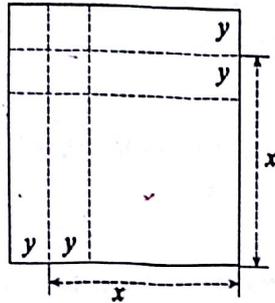
ج) فاصله شهر  $B$  تا  $D$  عددی بین ۱۰۴ و ۲۱۶ می‌باشد.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

(۱) صفر



۲۹- شکل مقابل کدام یک از اتحادهای زیر را نمی‌تواند نشان دهد؟

$$(x+y)(x-y) = 2(x-y)y + (x-y)^2 \quad (۱)$$

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy \quad (۲)$$

$$(x+2y)(x+y) = x^2 + 2y^2 + 3xy \quad (۳)$$

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \quad (۴)$$

۳۰- در جریان حفاری زمین در سال ۱۹۸۴، دانشمندان زمین‌شناس روسیه به این نتیجه رسیده‌اند که درجه‌ی حرارت در عمق  $x$  کیلومتری زیر

سطح زمین از رابطه  $T = 25(x-3) + 30$  به دست می‌آید. در چه عمقی درجه حرارت بین ۲۰۰ تا ۳۰۰ درجه تغییر می‌کند؟

$$6/8 < x < 9/8 \quad (۴) \quad 12/2 < x < 16/2 \quad (۳) \quad 9/8 < x < 13/8 \quad (۲) \quad 3/9 < x < 6/8 \quad (۱)$$